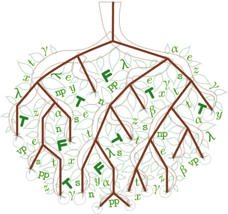
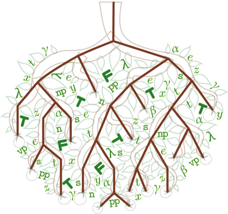
A Natural Proof System for Natural Language

NPS4NL-2: Semantic Tableau Method



Lasha Abzianidze   Reinhard Muskens

university of groningen   Tilburg University



ESSLLI 2019 in Rīga, Latvija

Logic & proof systems

Logic consists of four components:

- Intuitive non-formal motivation
- Syntax of formulas: well-formed formulas vs ill-formed ones
- Semantics associated with the formulas
- Some type of proof calculus

A proof calculus/system:

- employed to systematically capture valid formulas and arguments
- is a syntactic game: there are legal and illegal moves
- comes in several flavours
- is usually a sound and complete

Semantic tableau method

A semantic tableau method [Beth, 1955, Hintikka, 1955] is a proof procedure for formal logics that checks formulas with truth constraints:

Input: A set of signed formulas
$P_1 : \mathrm{T}, \ldots, P_m : \mathrm{T},\ Q_1 : \mathrm{F}, \ldots, Q_n : \mathrm{F}$

Output: some or no model satisfying the truth constraints on the formulas
☞ A model search problem

Prove or refute

Whenever it rains, the roof leaks

How to verify truth of this statement?

Show that:

- In every situation it is true — Approval route
  Check every situation when it rains and show the roof leaking
- In some situation it is not true — Refutation route
  Find some situation when it rains and the roof isn't leaking

Proving by failing to refute

A tableau method tries to refute statement in order to prove it:

1. Given $P_1,...,P_m$ Í Q to prove
2. Try to refute $P_1,...,P_m$ Í Q
   1. Build the counterexample: $P_1 : \mathrm{T}, \ldots, P_m : \mathrm{T},\ Q : \mathrm{F}$
   2. Try to satisfy the counterexample
3. If refutation succeeded, $P_1,...,P_m$ Í Q is disproved
4. Otherwise $P_1,...,P_m$ Í Q is proved

Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ :P*

Propositional tableau method (signed version)

Prove: P ^ Q Í Q ^ : P

Counterexample: P ^ Q : T, Q ^ : P : F

1 P ^ Q : T

2 Q ^ : P : F

Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ :P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ :P* : F

1. *P ^ Q* : T
2. *Q ^ :P* : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
—
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
—
X : F | *Y* : F

_T
X _ Y : T
—
X : T | *Y* : T

_F
X _ Y : F
—
X : F
Y : F

:F
:X : F
—
X : T

:T
:X : T
—
X : F

£
X : T
X : F
—
£

Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ : P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ : P* : F

1 *P ^ Q* : T

2 *Q ^ : P* : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | *Y* : F

_T
X _ Y : T
X : T | *Y* : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: *X* : F
X : T

:T
: *X* : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Propositional tableau method (signed version)

Prove: P ^ Q Í Q ^ : P
Counterexample: P ^ Q : T, Q ^ : P : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 P ^ Q : T
2 Q ^ : P : F
^T[1]
3 P : T
4 Q : T

Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ : P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ : P* : F

1 *P ^ Q* : T

2 *Q ^ : P* : F

^T[1]

3 *P* : T

4 *Q* : T

Propositional tableau rules:

^T

X ^ Y : T
X : T *Y* : T

^F

X ^ Y : F	
X : F	*Y* : F

_T

X _ Y : T	
X : T	*Y* : T

_F

X _ Y : F
X : F *Y* : F

:F

: X : F
X : T

:T

: X : T
X : F

£

X : T *X* : F
£

Propositional tableau method (signed version)

Prove: $P \wedge Q$ Í Q ^ : P
Counterexample: P ^ Q : T, Q ^ : P : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

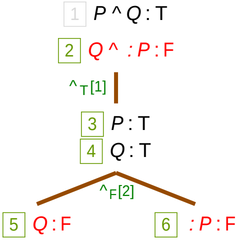
£
X : T
X : F
£

1 P ^ Q : T
2 Q ^ : P : F
^T[1]
3 P : T
4 Q : T

Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ :P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ :P* : F



Propositional tableau rules:

^T: *X ^ Y* : T ⟹ *X* : T, *Y* : T

^F: *X ^ Y* : F ⟹ *X* : F | *Y* : F

_T: *X _ Y* : T ⟹ *X* : T | *Y* : T

_F: *X _ Y* : F ⟹ *X* : F, *Y* : F

:F: *:X* : F ⟹ *X* : T

:T: *:X* : T ⟹ *X* : F

£: *X* : T, *X* : F ⟹ £

Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P* ^ *Q* Í *Q* ^ :*P*

Counterexample: *P* ^ *Q* : T, *Q* ^ :*P* : F

Propositional tableau rules:

^T: *X* ^ *Y* : T ⟹ *X* : T, *Y* : T

^F: *X* ^ *Y* : F ⟹ *X* : F | *Y* : F

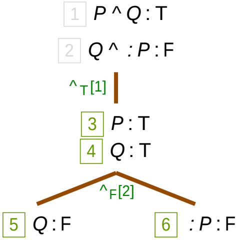
_T: *X* _ *Y* : T ⟹ *X* : T | *Y* : T

_F: *X* _ *Y* : F ⟹ *X* : F, *Y* : F

:F: :*X* : F ⟹ *X* : T

:T: :*X* : T ⟹ *X* : F

£: *X* : T, *X* : F ⟹ £



Propositional tableau method (signed version)

Prove: $P \text{ ^ } Q$ Í $Q \text{ ^ } :P$

Counterexample: $P \text{ ^ } Q$: T, $Q \text{ ^ } :P$: F

Propositional tableau rules:

^T

X ^ Y : T
X : T Y : T

^F

X ^ Y : F	
X : F	Y : F

_T

X _ Y : T	
X : T	Y : T

_F

X _ Y : F
X : F Y : F

:F

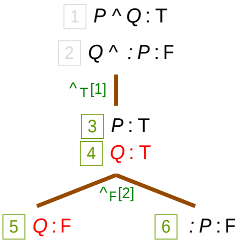
:X : F
X : T

:T

:X : T
X : F

£

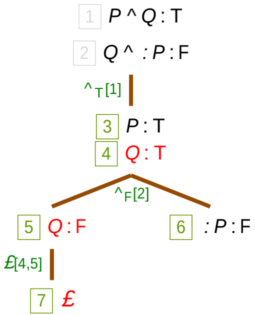
X : T X : F
£



Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ : P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ : P* : F



Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | *Y* : F

_T
X _ Y : T
X : T | *Y* : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: *X* : F
X : T

:T
: *X* : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ :P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ :P* : F

Propositional tableau rules:

^T
- *X ^ Y* : T
- *X* : T
- *Y* : T

^F
- *X ^ Y* : F
- *X* : F | *Y* : F

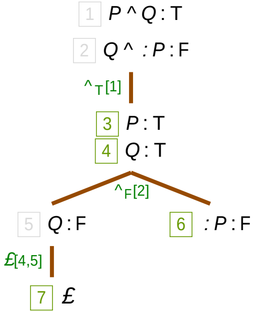
_T
- *X _ Y* : T
- *X* : T | *Y* : T

_F
- *X _ Y* : F
- *X* : F
- *Y* : F

:F
- *:X* : F
- *X* : T

:T
- *:X* : T
- *X* : F

£
- *X* : T
- *X* : F
- £



Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ : P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ : P* : F

Propositional tableau rules:

^T

X ^ Y : T
X : T *Y* : T

^F

X ^ Y : F	
X : F	*Y* : F

_T

X _ Y : T	
X : T	*Y* : T

_F

X _ Y : F
X : F *Y* : F

:F

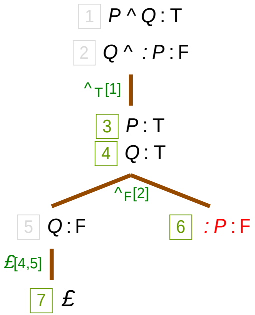
: X : F
X : T

:T

: X : T
X : F

£

X : T *X* : F
£



Propositional tableau method (signed version)

Prove: P ^ Q Í Q ^ : P

Counterexample: P ^ Q : T, Q ^ : P : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T ⟹ X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F ⟹ X : F | Y : F

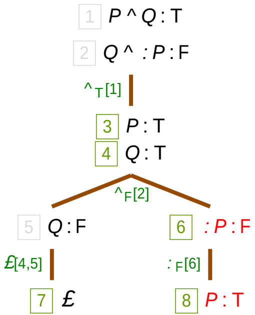
_T: X _ Y : T ⟹ X : T | Y : T

_F: X _ Y : F ⟹ X : F, Y : F

:F: : X : F ⟹ X : T

:T: : X : T ⟹ X : F

£: X : T, X : F ⟹ £



Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ :P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ :P* : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

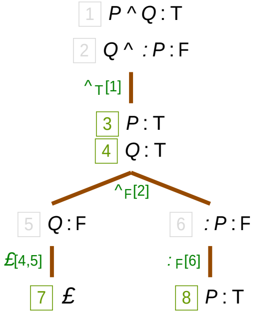
_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
:X : F
X : T

:T
:X : T
X : F

£
X : T
X : F
£



Propositional tableau method (signed version)

Prove: *P ^ Q Í Q ^ : P*

Counterexample: *P ^ Q* : T, *Q ^ : P* : F

Propositional tableau rules:

^T: *X ^ Y* : T ⟹ *X* : T, *Y* : T

^F: *X ^ Y* : F ⟹ *X* : F | *Y* : F

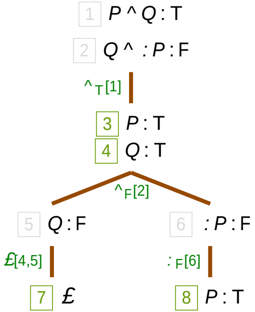
_T: *X _ Y* : T ⟹ *X* : T | *Y* : T

_F: *X _ Y* : F ⟹ *X* : F, *Y* : F

:F: *: X* : F ⟹ *X* : T

:T: *: X* : T ⟹ *X* : F

£: *X* : T, *X* : F ⟹ £



A situation supporting a counterexample: *P* : T, *Q* : T

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T Y : T

^F	
X ^ Y : F	
X : F	Y : F

_T	
X _ Y : T	
X : T	Y : T

_F
X _ Y : F
X : F Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T X : F
£

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Closed tableau

Prove: $:(P \mathbin{^\wedge} Q)$ Í $:P$ _ $:Q$

Counterexample: $:(P \mathbin{^\wedge} Q) : \mathrm{T}$, $:P$ _ $:Q : \mathrm{F}$

1 $:(P \mathbin{^\wedge} Q) : \mathrm{T}$

2 $:P$ _ $:Q : \mathrm{F}$

Propositional tableau rules:

^T
X ^ $Y : \mathrm{T}$
$X : \mathrm{T}$
$Y : \mathrm{T}$

^F
X ^ $Y : \mathrm{F}$
$X : \mathrm{F}$ | $Y : \mathrm{F}$

_T
X _ $Y : \mathrm{T}$
$X : \mathrm{T}$ | $Y : \mathrm{T}$

_F
X _ $Y : \mathrm{F}$
$X : \mathrm{F}$
$Y : \mathrm{F}$

:F
$:X : \mathrm{F}$
$X : \mathrm{T}$

:T
$:X : \mathrm{T}$
$X : \mathrm{F}$

£
$X : \mathrm{T}$
$X : \mathrm{F}$
£

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

: T[1]

3 P ^ Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

: T[1]

3 P ^ Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

: T[1]

3 P ^ Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T Y : T

^F	
X ^ Y : F	
X : F	Y : F

_T	
X _ Y : T	
X : T	Y : T

_F
X _ Y : F
X : F Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T X : F
£

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

: T[1]

3 P ^ Q : F

_ F[2]

4 : P : F

5 : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

: T[1]

3 P ^ Q : F

_ F[2]

4 : P : F

5 : Q : F

Propositional tableau rules:

^ T

X ^ Y : T

X : T
Y : T

^ F

X ^ Y : F

X : F | Y : F

_ T

X _ Y : T

X : T | Y : T

_ F

X _ Y : F

X : F
Y : F

: F

: X : F

X : T

: T

: X : T

X : F

£

X : T
X : F

£

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F
:F[4]
6 P : T

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F
:F[4]
6 P : T

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F
:F[4]
6 P : T

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F
:F[4]
6 P : T
:F[5]
7 Q : T

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T

X ^ Y : T

X : T
Y : T

^F

X ^ Y : F

X : F | Y : F

_T

X _ Y : T

X : T | Y : T

_F

X _ Y : F

X : F
Y : F

:F

: X : F

X : T

:T

: X : T

X : F

£

X : T
X : F

£

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

:T[1]

3 P ^ Q : F

_F[2]

4 : P : F

5 : Q : F

:F[4]

6 P : T

:F[5]

7 Q : T

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F
:F[4]
6 P : T
:F[5]
7 Q : T

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T ⟹ X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F ⟹ X : F | Y : F

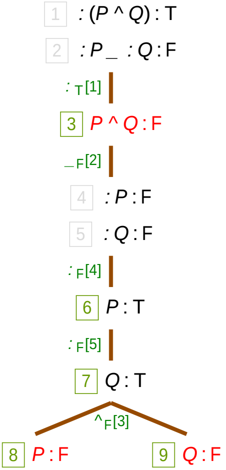
_T: X _ Y : T ⟹ X : T | Y : T

_F: X _ Y : F ⟹ X : F, Y : F

:F: : X : F ⟹ X : T

:T: : X : T ⟹ X : F

£: X : T, X : F ⟹ £



Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
———
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
———
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
———
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
———
X : F
Y : F

:F
: X : F
———
X : T

:T
: X : T
———
X : F

£
X : T
X : F
———
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
: T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F
: F[4]
6 P : T
: F[5]
7 Q : T
^F[3]
8 P : F | 9 Q : F

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F
:F[4]
6 P : T
:F[5]
7 Q : T
^F[3]
8 P : F | 9 Q : F

Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T Y : T

^F	
X ^ Y : F	
X : F	Y : F

_T	
X _ Y : T	
X : T	Y : T

_F
X _ Y : F
X : F Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T X : F
£

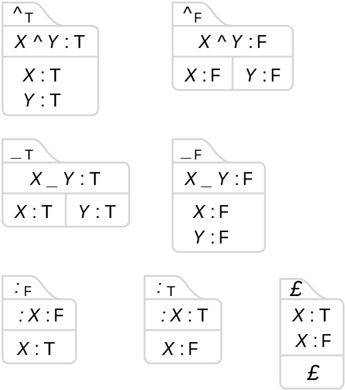
1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
_F[2]
4 : P : F
5 : Q : F
:F[4]
6 P : T
:F[5]
7 Q : T
^F[3]
8 P : F | 9 Q : F
£[6,8]
10 £

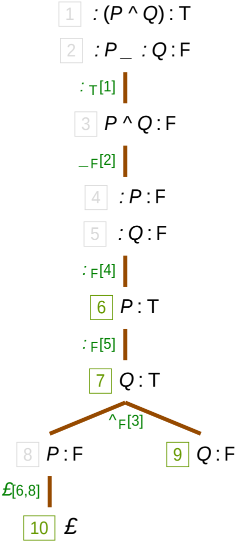
Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:





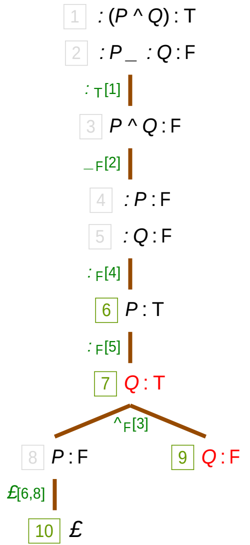
Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

- ^T: X ^ Y : T ⟹ X : T, Y : T
- ^F: X ^ Y : F ⟹ X : F | Y : F
- _T: X _ Y : T ⟹ X : T | Y : T
- _F: X _ Y : F ⟹ X : F, Y : F
- :F: : X : F ⟹ X : T
- :T: : X : T ⟹ X : F
- £: X : T, X : F ⟹ £

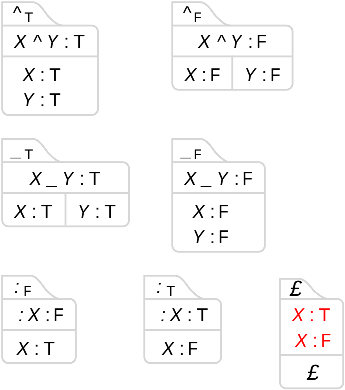


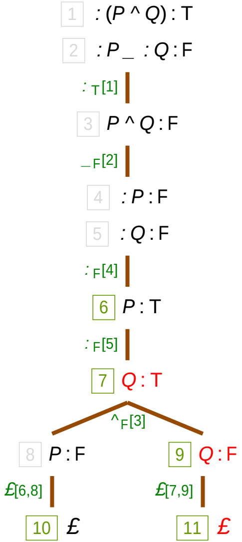
Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:





Closed tableau

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q Proved!

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T Y : T

^F	
X ^ Y : F	
X : F	Y : F

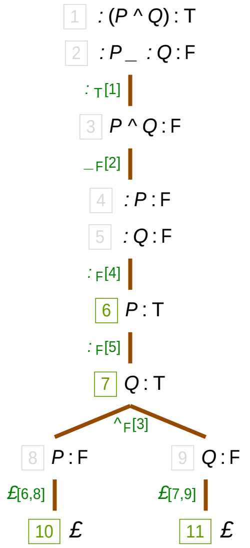
_T	
X _ Y : T	
X : T	Y : T

_F
X _ Y : F
X : F Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T X : F
£



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q
Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T Y : T

^F	
X ^ Y : F	
X : F	Y : F

_T	
X _ Y : T	
X : T	Y : T

_F
X _ Y : F
X : F Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T X : F
£

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

:T[1]

3 P ^ Q : F

Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

:T[1]

3 P ^ Q : F

Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T

2 : P _ : Q : F

:T[1]

3 P ^ Q : F

Different proof strategy

Prove: : (*P* ^ *Q*) Í : *P* _ : *Q*

Counterexample: : (*P* ^ *Q*) : T, : *P* _ : *Q* : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ *Y* : T

X : T
Y : T

^F
X ^ *Y* : F

X : F | *Y* : F

_T
X _ *Y* : T

X : T | *Y* : T

_F
X _ *Y* : F

X : F
Y : F

:F
: *X* : F

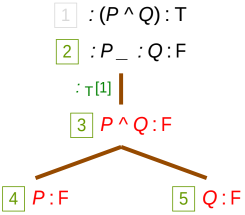
X : T

:T
: *X* : T

X : F

£
X : T
X : F

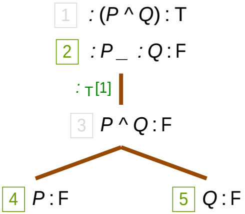
£



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F



Propositional tableau rules:

- ^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T
- ^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F
- _T: X _ Y : T / X : T | Y : T
- _F: X _ Y : F / X : F, Y : F
- :F: : X : F / X : T
- :T: : X : T / X : F
- £: X : T, X : F / £

Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

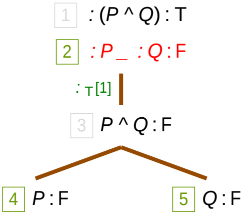
_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F

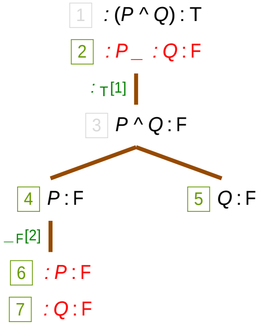
_T: X _ Y : T / X : T | Y : T

_F: X _ Y : F / X : F, Y : F

:F: : X : F / X : T

:T: : X : T / X : F

£: X : T, X : F / £



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

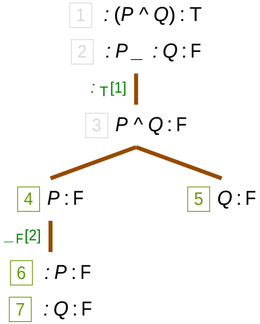
_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

1 : (P ^ Q) : T
2 : P _ : Q : F
:T[1]
3 P ^ Q : F
4 P : F | 5 Q : F
_F[2]
6 : P : F
7 : Q : F

Different proof strategy

Prove: $:(P \,\hat{}\, Q) \;Í\; :P \,\_\, :Q$

Counterexample: $:(P \,\hat{}\, Q) : \mathrm{T},\ :P \,\_\, :Q : \mathrm{F}$

Propositional tableau rules:

$\hat{}_\mathrm{T}$: $X \,\hat{}\, Y : \mathrm{T}$ / $X : \mathrm{T}$, $Y : \mathrm{T}$

$\hat{}_\mathrm{F}$: $X \,\hat{}\, Y : \mathrm{F}$ / $X : \mathrm{F}$ | $Y : \mathrm{F}$

$\_{}_\mathrm{T}$: $X \,\_\, Y : \mathrm{T}$ / $X : \mathrm{T}$ | $Y : \mathrm{T}$

$\_{}_\mathrm{F}$: $X \,\_\, Y : \mathrm{F}$ / $X : \mathrm{F}$, $Y : \mathrm{F}$

$:_\mathrm{F}$: $:X : \mathrm{F}$ / $X : \mathrm{T}$

$:_\mathrm{T}$: $:X : \mathrm{T}$ / $X : \mathrm{F}$

£: $X : \mathrm{T}$, $X : \mathrm{F}$ / £

1 $:(P \,\hat{}\, Q) : \mathrm{T}$

2 $:P \,\_\, :Q : \mathrm{F}$

$:_\mathrm{T}[1]$

3 $P \,\hat{}\, Q : \mathrm{F}$

4 $P : \mathrm{F}$ | 5 $Q : \mathrm{F}$

$\_{}_\mathrm{F}[2]$

6 $:P : \mathrm{F}$

7 $:Q : \mathrm{F}$

$:_\mathrm{F}[6]$

8 $P : \mathrm{T}$

Different proof strategy

Prove: : (*P* ^ *Q*) Í : *P* _ : *Q*

Counterexample: : (*P* ^ *Q*) : T, : *P* _ : *Q* : F

Propositional tableau rules:

^T: *X* ^ *Y* : T / *X* : T, *Y* : T

^F: *X* ^ *Y* : F / *X* : F | *Y* : F

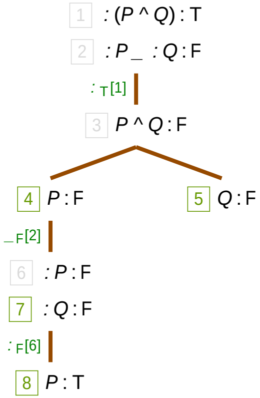
_T: *X* _ *Y* : T / *X* : T | *Y* : T

_F: *X* _ *Y* : F / *X* : F, *Y* : F

:F: : *X* : F / *X* : T

:T: : *X* : T / *X* : F

£: *X* : T, *X* : F / £



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F

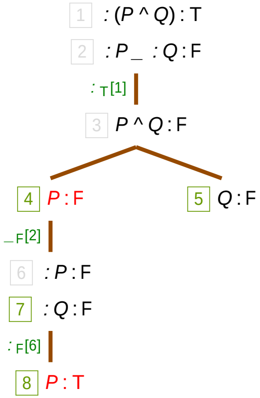
_T: X _ Y : T / X : T | Y : T

_F: X _ Y : F / X : F, Y : F

:F: : X : F / X : T

:T: : X : T / X : F

£: X : T, X : F / £



Different proof strategy

Prove: $: (P \wedge Q)$ Í $: P \_ : Q$

Counterexample: $: (P \wedge Q) : \mathrm{T}$, $: P \_ : Q : \mathrm{F}$

Propositional tableau rules:

^T: $X \wedge Y : \mathrm{T}$ ⟹ $X : \mathrm{T}$, $Y : \mathrm{T}$

^F: $X \wedge Y : \mathrm{F}$ ⟹ $X : \mathrm{F}$ | $Y : \mathrm{F}$

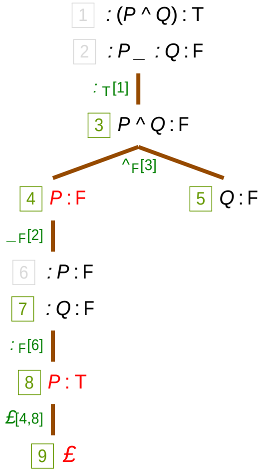
_T: $X \_ Y : \mathrm{T}$ ⟹ $X : \mathrm{T}$ | $Y : \mathrm{T}$

_F: $X \_ Y : \mathrm{F}$ ⟹ $X : \mathrm{F}$, $Y : \mathrm{F}$

:F: $: X : \mathrm{F}$ ⟹ $X : \mathrm{T}$

:T: $: X : \mathrm{T}$ ⟹ $X : \mathrm{F}$

£: $X : \mathrm{T}$, $X : \mathrm{F}$ ⟹ £



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F

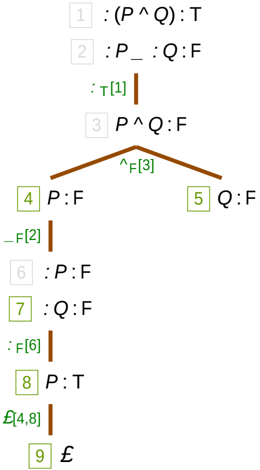
_T: X _ Y : T / X : T | Y : T

_F: X _ Y : F / X : F, Y : F

:F: : X : F / X : T

:T: : X : T / X : F

£: X : T, X : F / £



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F

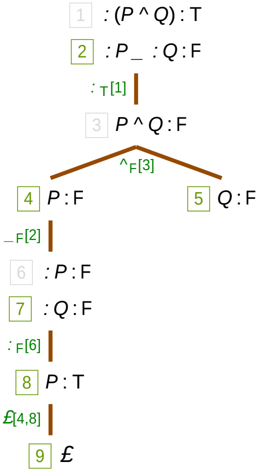
_T: X _ Y : T / X : T | Y : T

_F: X _ Y : F / X : F, Y : F

:F: : X : F / X : T

:T: : X : T / X : F

£: X : T, X : F / £



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

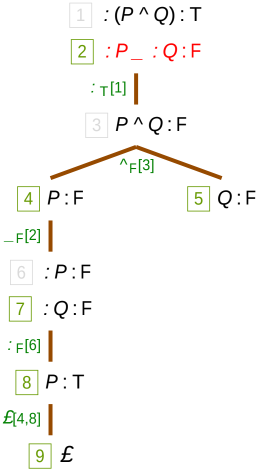
_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

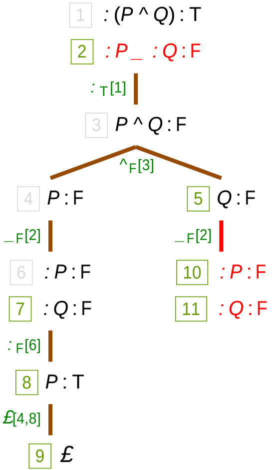
_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£

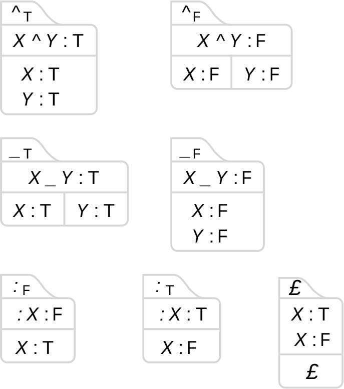


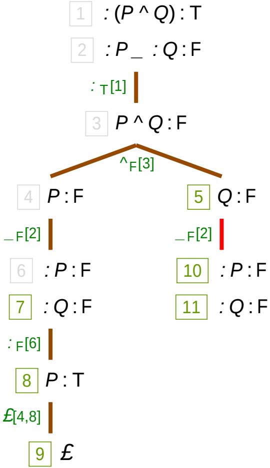
Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:





Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F

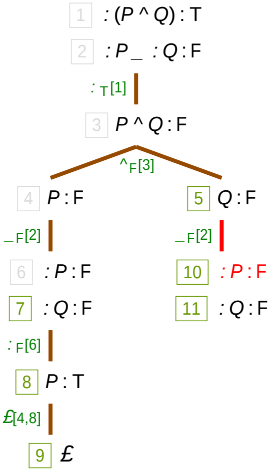
_T: X _ Y : T / X : T | Y : T

_F: X _ Y : F / X : F, Y : F

:F: : X : F / X : T

:T: : X : T / X : F

£: X : T, X : F / £



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F

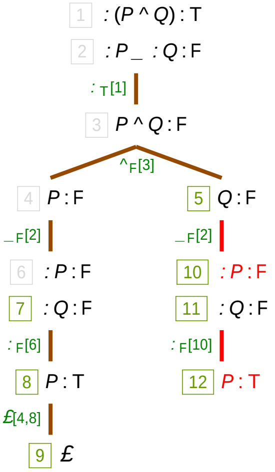
_T: X _ Y : T / X : T | Y : T

_F: X _ Y : F / X : F, Y : F

:F: : X : F / X : T

:T: : X : T / X : F

£: X : T, X : F / £



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F

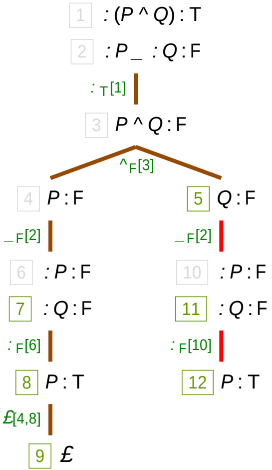
_T: X _ Y : T / X : T | Y : T

_F: X _ Y : F / X : F, Y : F

:F: : X : F / X : T

:T: : X : T / X : F

£: X : T, X : F / £



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T
X ^ Y : T
X : T
Y : T

^F
X ^ Y : F
X : F | Y : F

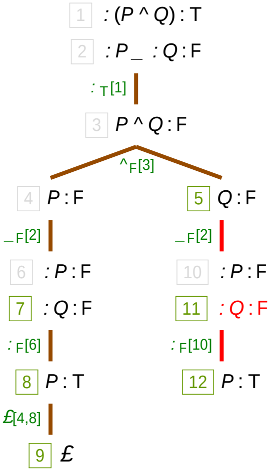
_T
X _ Y : T
X : T | Y : T

_F
X _ Y : F
X : F
Y : F

:F
: X : F
X : T

:T
: X : T
X : F

£
X : T
X : F
£



Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T / X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F / X : F | Y : F

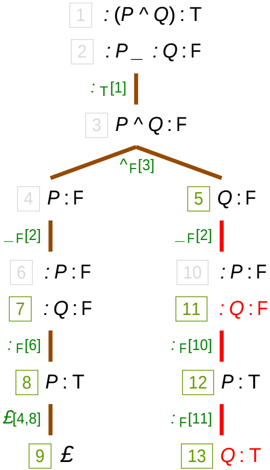
_T: X _ Y : T / X : T | Y : T

_F: X _ Y : F / X : F, Y : F

:F: : X : F / X : T

:T: : X : T / X : F

£: X : T, X : F / £

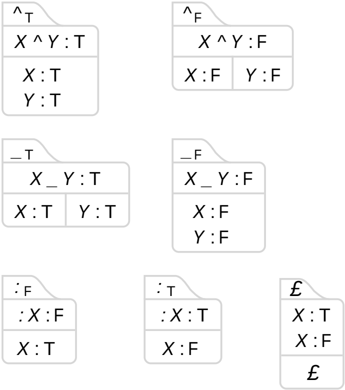


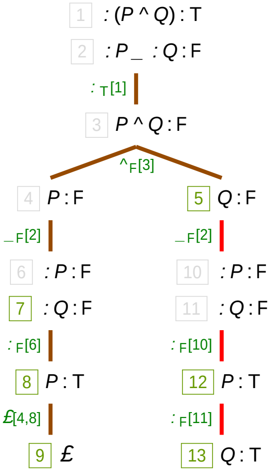
Different proof strategy

Prove: $:(P \,\hat{}\, Q)$ Í $:P$ _ $:Q$

Counterexample: $:(P \,\hat{}\, Q) : \mathrm{T}$, $:P$ _ $:Q : \mathrm{F}$

Propositional tableau rules:



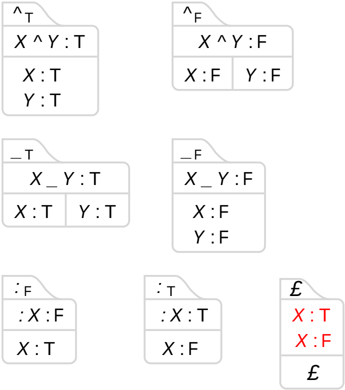


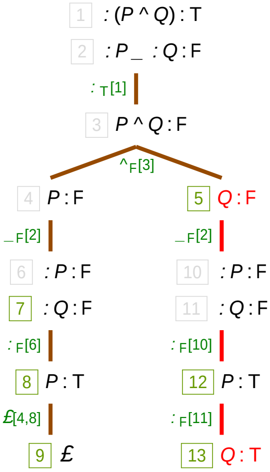
Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:





Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:

^T: X ^ Y : T ⟹ X : T, Y : T

^F: X ^ Y : F ⟹ X : F | Y : F

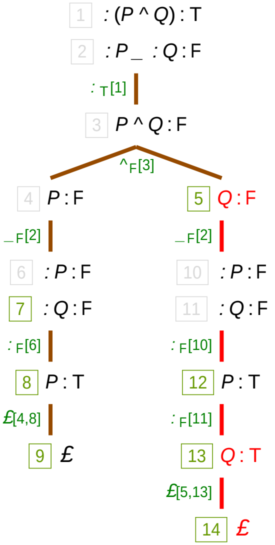
_T: X _ Y : T ⟹ X : T | Y : T

_F: X _ Y : F ⟹ X : F, Y : F

:F: : X : F ⟹ X : T

:T: : X : T ⟹ X : F

£: X : T, X : F ⟹ £

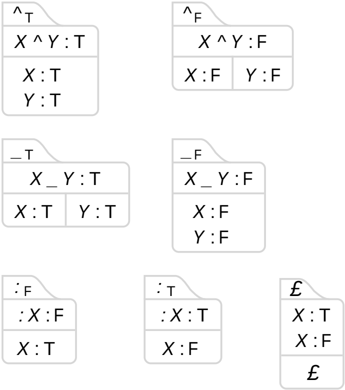


Different proof strategy

Prove: : (P ^ Q) Í : P _ : Q Prover!

Counterexample: : (P ^ Q) : T, : P _ : Q : F

Propositional tableau rules:



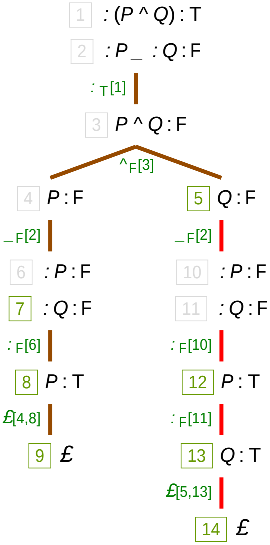


Tableau exercise

1 P _ (Q ^ : R) : T

2 (P _ : R) ^ (: Q _ Q) : F

Tableau exercise

1 $P \_ (Q \wedge : R) : T$

2 $(P \_ : R) \wedge (: Q \_ Q) : F$

3 $P \_ : R : F$

4 $: Q \_ Q : F$

Tableau exercise

1 P _ (Q ^ : R) : T

2 (P _ : R) ^ (: Q _ Q) : F

3 P _ : R : F

5 P : F

6 : R : F

4 : Q _ Q : F

Tableau exercise

1 P _ (Q ^ : R) : T

2 (P _ : R) ^ (: Q _ Q) : F

3 P _ : R : F

4 : Q _ Q : F

5 P : F

6 : R : F

7 P : T

8 Q ^ : R : T

Tableau exercise

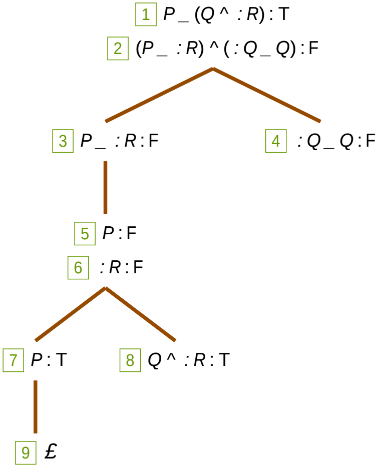


Tableau exercise

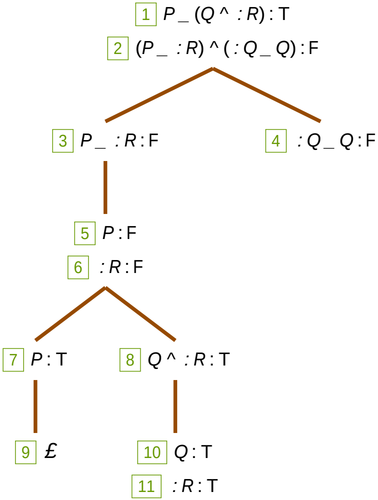


Tableau exercise

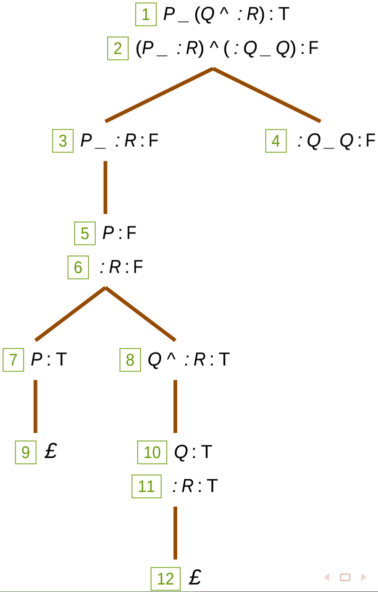


Tableau exercise

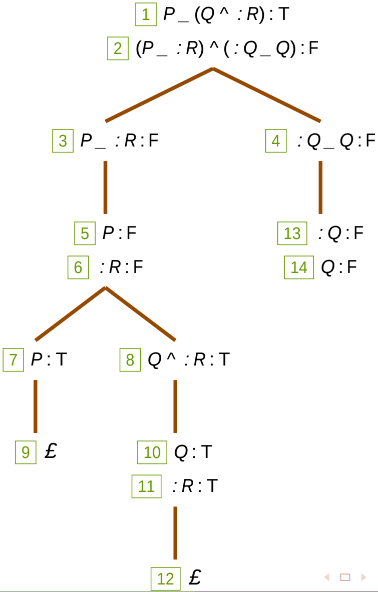


Tableau exercise

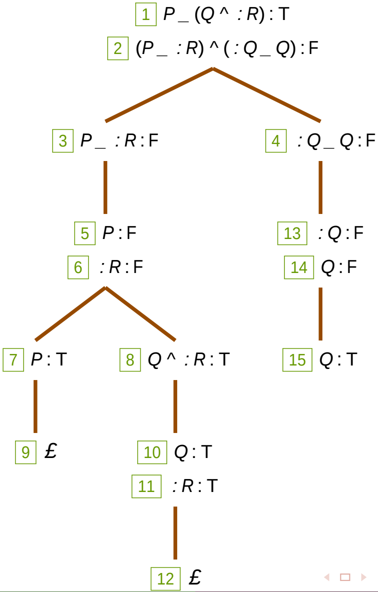
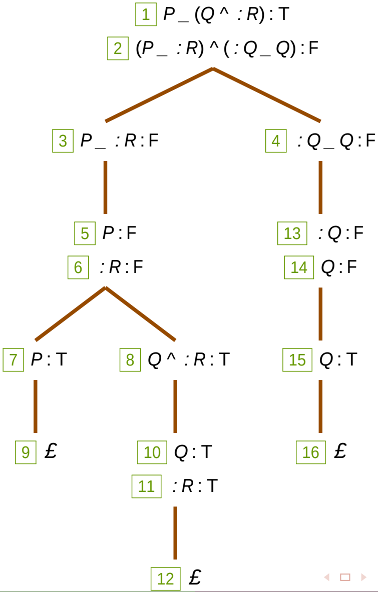


Tableau exercise



Quiz

1. If propositional formula *Á* is built up from *n* Boolean connectives, at most how many rule applications will be applicable to the tableau started with *Á* : T?
2. . . . started with *Á* : F?
3. Can you think of tableau rules for *!* T and *!* F?

Rules for quantifiers

Rules for *9*:

9_{T}
$9x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is old

Rules for quantifiers

Rules for *9*:

9_{T}
$9x.Á$: T
$Á[x/c]$: T
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á$: F
$Á[x/c]$: F
c is old

Rules for *8*:

8_{F}
$8x.Á$: F
$Á[x/c]$: F
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á$: T
$Á[x/c]$: T
c is old

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}
$9x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is old

Rules for 8:

8_{F}
$8x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is old

- Dangerous zone!

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}

$9x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}

$9x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is old

Rules for 8:

8_{F}

$8x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is fresh

8^{c}_{T}

$8x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is old

- Dangerous zone!

1 $8x.9y.$`love`$(x,y) : \mathrm{T}$

2 $8z.$`love`$(z,z) : \mathrm{F}$

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}
$9x.Á : \mathsf{T}$
$Á[x/c] : \mathsf{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : \mathsf{F}$
$Á[x/c] : \mathsf{F}$
c is old

Rules for 8:

8_{F}
$8x.Á : \mathsf{F}$
$Á[x/c] : \mathsf{F}$
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á : \mathsf{T}$
$Á[x/c] : \mathsf{T}$
c is old

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : \mathsf{T}$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : \mathsf{F}$

- Dangerous zone!

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}
$9x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is old

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : \mathrm{T}$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : \mathrm{F}$

$8_{\mathrm{F}[2]}$

3 $\mathtt{love}(c,c) : \mathrm{F}$

Rules for 8:

8_{F}
$8x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is old

- Dangerous zone!

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_T
$9x.Á : T$
$Á[x/c] : T$
c is fresh

9^c_F
$9x.Á : F$
$Á[x/c] : F$
c is old

Rules for 8:

8_F
$8x.Á : F$
$Á[x/c] : F$
c is fresh

8^c_T
$8x.Á : T$
$Á[x/c] : T$
c is old

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : T$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : F$

$8_{F[2]}$

3 $\mathtt{love}(c,c) : F$

- Dangerous zone!

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}
$9x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is old

Rules for 8:

8_{F}
$8x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is old

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : \mathrm{T}$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : \mathrm{F}$

$8_{\mathrm{F}[2]}$

3 $\mathtt{love}(c,c) : \mathrm{F}$

- Dangerous zone!

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_T
$9x.Á : T$
$Á[x/c] : T$
c is fresh

9^c_F
$9x.Á : F$
$Á[x/c] : F$
c is old

Rules for 8:

8_F
$8x.Á : F$
$Á[x/c] : F$
c is fresh

8^c_T
$8x.Á : T$
$Á[x/c] : T$
c is old

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : T$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : F$

$8_F[2]$

3 $\mathtt{love}(c,c) : F$

$8^c_T[1]$

4 $9y.\mathtt{love}(c,y) : T$

- Dangerous zone!

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}
$9x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is old

Rules for 8:

8_{F}
$8x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is old

1 $8x.9y.\texttt{love}(x,y) : \mathrm{T}$

2 $8z.\texttt{love}(z,z) : \mathrm{F}$

$8_{\mathrm{F}}[2]$

3 $\texttt{love}(c,c) : \mathrm{F}$

$8^{c}_{\mathrm{T}}[1]$

4 $9y.\texttt{love}(c,y) : \mathrm{T}$

- Dangerous zone!

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_T
$9x.Á$: T
$Á[x/c]$: T
c is fresh

9^c_F
$9x.Á$: F
$Á[x/c]$: F
c is old

Rules for 8:

8_F
$8x.Á$: F
$Á[x/c]$: F
c is fresh

8^c_T
$8x.Á$: T
$Á[x/c]$: T
c is old

- Dangerous zone!

1 $8x.9y.\texttt{love}(x,y)$: T

2 $8z.\texttt{love}(z,z)$: F

$8_F[2]$

3 $\texttt{love}(c,c)$: F

$8^c_T[1]$

4 $9y.\texttt{love}(c,y)$: T

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_T

$9x.Á : T$
$Á[x/c] : T$
c is fresh

9^c_F

$9x.Á : F$
$Á[x/c] : F$
c is old

Rules for 8:

8_F

$8x.Á : F$
$Á[x/c] : F$
c is fresh

8^c_T

$8x.Á : T$
$Á[x/c] : T$
c is old

- Dangerous zone!

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : T$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : F$

$8_F[2]$

3 $\mathtt{love}(c,c) : F$

$8^c_T[1]$

4 $9y.\mathtt{love}(c,y) : T$

$9^c_T[4]$

5 $\mathtt{love}(c,d) : T$

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}
$9x.Á : T$
$Á[x/c] : T$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : F$
$Á[x/c] : F$
c is old

Rules for 8:

8_{F}
$8x.Á : F$
$Á[x/c] : F$
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á : T$
$Á[x/c] : T$
c is old

- Dangerous zone!

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : T$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : F$

$8_{F}[2]$

3 $\mathtt{love}(c,c) : F$

$8^{c}_{T}[1]$

4 $9y.\mathtt{love}(c,y) : T$

$9^{c}_{T}[4]$

5 $\mathtt{love}(c,d) : T$

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}
$9x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is old

Rules for 8:

8_{F}
$8x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is old

- Dangerous zone!

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : \mathrm{T}$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : \mathrm{F}$

$8_{\mathrm{F}}[2]$

3 $\mathtt{love}(c,c) : \mathrm{F}$

$8^{c}_{\mathrm{T}}[1]$

4 $9y.\mathtt{love}(c,y) : \mathrm{T}$

$9^{c}_{\mathrm{T}}[4]$

5 $\mathtt{love}(c,d) : \mathrm{T}$

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_{T}

$9x.Á : \mathrm{T}$

$Á[x/c] : \mathrm{T}$

c is fresh

9^{c}_{F}

$9x.Á : \mathrm{F}$

$Á[x/c] : \mathrm{F}$

c is old

Rules for 8:

8_{F}

$8x.Á : \mathrm{F}$

$Á[x/c] : \mathrm{F}$

c is fresh

8^{c}_{T}

$8x.Á : \mathrm{T}$

$Á[x/c] : \mathrm{T}$

c is old

- Dangerous zone!

1 $8x.9y.\mathtt{love}(x,y) : \mathrm{T}$

2 $8z.\mathtt{love}(z,z) : \mathrm{F}$

$8_{\mathrm{F}}[2]$

3 $\mathtt{love}(c,c) : \mathrm{F}$

$8^{c}_{\mathrm{T}}[1]$

4 $9y.\mathtt{love}(c,y) : \mathrm{T}$

$9^{c}_{\mathrm{T}}[4]$

5 $\mathtt{love}(c,d) : \mathrm{T}$

$8^{d}_{\mathrm{T}}[1]$

6 $9y.\mathtt{love}(d,y) : \mathrm{T}$

Rules for quantifiers

Rules for 9:

9_T
$9x.Á$: T
$Á[x/c]$: T
c is fresh

9^c_F
$9x.Á$: F
$Á[x/c]$: F
c is old

Rules for 8:

8_F
$8x.Á$: F
$Á[x/c]$: F
c is fresh

8^c_T
$8x.Á$: T
$Á[x/c]$: T
c is old

- Dangerous zone!

1 $8x.9y.$love(x,y) : T

2 $8z.$love(z,z) : F

$8_F[2]$

3 love(c,c) : F

$8^c_T[1]$

4 $9y.$love(c,y) : T

$9^c_T[4]$

5 love(c,d) : T

$8^d_T[1]$

6 $9y.$love(d,y) : T

⋮

Non-empty domain

Rules for 9:

9_{T}
$9x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is old

Rules for 8:

8_{F}
$8x.Á : \mathrm{F}$
$Á[x/c] : \mathrm{F}$
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á : \mathrm{T}$
$Á[x/c] : \mathrm{T}$
c is old

1 $8x.^{¡}\mathtt{run}(x) \wedge : \mathtt{run}(x)^{¢} : \mathrm{T}$

Non-empty domain

Rules for *9*:

9_{T}
$9x.Á$: T
$Á[x/c]$: T
c is fresh

9^{c}_{F}
$9x.Á$: F
$Á[x/c]$: F
c is old

Rules for *8*:

8_{F}
$8x.Á$: F
$Á[x/c]$: F
c is fresh

8^{c}_{T}
$8x.Á$: T
$Á[x/c]$: T
c is old

1 $8x.$ ¡ run(x) ^ : run(x) ¢ : T

Non-empty domain constraint:
you can always have an entity

Simple type theory

We will use Simple Type Theory [Church, 1940] as a Higher-Order Logic.

A type system built up from *e* (*entity*) and *t* (*truth*) basic types:

- *e* and *t* are types;
- if ® and ¯ are types, so are (®¯)

Simple type theory

We will use Simple Type Theory [Church, 1940] as a Higher-Order Logic.

A type system built up from *e* (*entity*) and *t* (*truth*) basic types:

- *e* and *t* are types;
- if ® and ¯ are types, so are (®¯)

Examples of types:

- *t* for sentences, e.g., *John sleeps*
- *et* for common nouns and intransitive verbs, e.g., *sleep*, *cat*
- (*et*)(*et*)*t* for determiners
- (*et*)(*et*) for adjectives
- *eet* for transitive verbs
- *e* for proper names (also (*et*)*t* is possible)

Typed terms

We assume to have infinite number of constant and variable terms of each type.

Compound terms are combined and typed as:

- if *B* is of type (®¯),
  and *A* is of type ®,
  then *BA* is of type ¯.
- if variable *x* is of type ®,
  and *B* is of type ¯,
  then ¸*x*.*B* is of type (®¯).

Typed terms

We assume to have infinite number of constant and variable terms of each type.

Compound terms are combined and typed as:

- if *B* is of type (®¯),
  and *A* is of type ®,
  then *BA* is of type ¯.
- if variable *x* is of type ®,
  and *B* is of type ¯,
  then ¸*x*.*B* is of type (®¯).

Association conventions:

- *ABC* Æ (*AB*)*C*
- (®¯°) Æ ®(¯°), e.g., (*et*)(*et*) Æ (*et*)*et*

Modeling arithmetic functions

Types for numbers:

- Basic types N for natural numbers and R for real numbers.
- Compound types: NR, NNN, RRR, RR, NN, RN, . . .

Typed terms:

- Constants: 1_N, 3.1415_R, 1_R, Å_{NNN}, £_{NNN}, p_{NR}, . . .
- Compound terms:

  $\text{Å}_{NNN} 1_N$ is of type NN,

  $p_{NR} 1_N$ is of type R,

  $\text{£}_{NNN} 1_N$ is of type NN,

  ¸$x_R.1_N$ is of type RN

Conclusion

- A semantic tableau method
  "today [it is] one of the most popular, since it appears to bring together the proof-theoretical and the semantical approaches to the presentation of a logical system and is also very intuitive. In many universities it is the style first taught to students." [D'Agostino et al., 1999].
- Propositional tableau system: when applying a rule to a tableau entry, remember to do so for each branch it sits on.
- Dangerous zone: First-order logic tableau might not terminate
- Simple type theory: typed terms model higher-order functions

References I

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wentenschappen, Proceedings of the Section of Sciences*, 18:309–342.

Church, A. (1940). A formulation of the simple theory of types. *Jurnal of Symbolic Logic*, 5(2):56–68.

D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle, R., and Posegga, J., editors (1999). *Handbook of Tableau Methods*. Springer.

Hintikka, J. (1955). *Two Papers on Symbolic Logic: Form and Content in Quantification Theory and Reductions in the Theory of Types*. Number 8 in Acta philosophica Fennica. Societas Philosophica.